パスカルの多角形

湯沢高校数学班
班　　員　飯野愛菜　大日向美憂　吉田日尚
指導教諭　芳賀崇　小西雅典

研究の概要

パスカルの三角形に含まれる二項係数を表す点を結んでできる多角形についての研究

その中でも、頂点の二項係数の間に等式が成り立つ多角形に注目した。

Hoggatt-Hansell等式

$$\binom{n-1}{r-1}\binom{n}{r+1}\binom{n+1}{r}=\binom{n-1}{r}\binom{n}{r-1}\binom{n+1}{r+1}$$

パスカルの三角形の中から一点を中心に六点取る。できた六角形の頂点を一つ飛ばしにかけると等しくなることを示した等式。

今回はこのような等式が成り立つほかの多角形について研究した。

検証内容

①Hoggatt-Hansell等式の証明
②六角形を2つつなげた場合
③六角形を3つつなげた場合
④六角形を相似拡大した場合
⑤六角形以外の図形について

①Hoggatt-Hansell等式の証明

両辺を展開すると成り立つことがわかる

$$\binom{n-1}{r-1}\binom{n}{r+1}\binom{n+1}{r}$$

$$=\frac{(n-1)!}{(n-1)!\,(n-1-r+1)!}\times\frac{n!}{(r+1)!\,(n-r-1)!}\times\frac{(n+1)!}{r!\,(n+1-r)!}$$

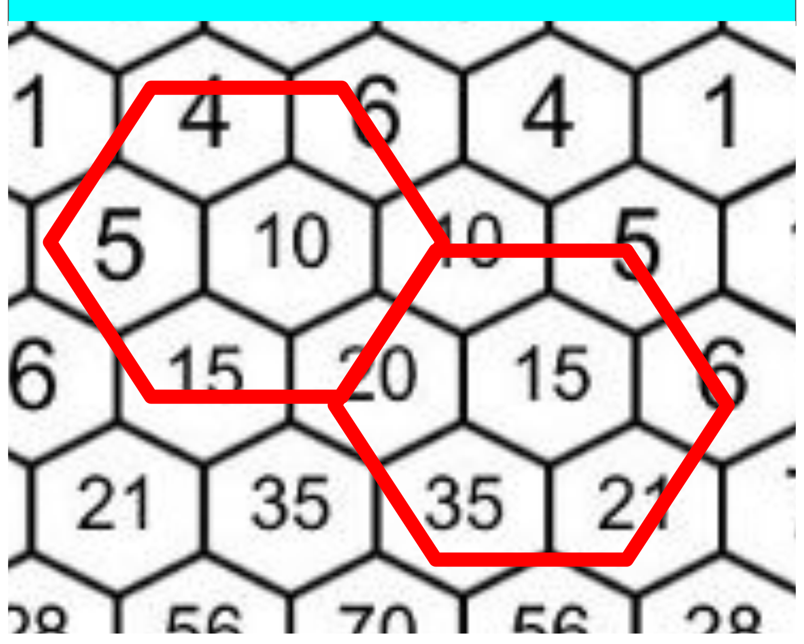
$$=\frac{n!\,(n-1)!\,(n+1)!}{r!\,(n-r-1)!\,(r+1)!\,(n-r)!\,(r-1)!\,(n-r+1)!}$$

$$\binom{n-1}{r}\binom{n+1}{r+1}\binom{n}{r-1}$$

$$=\frac{(n-1)!}{r!\,(n-1-r)!}\times\frac{(n+1)!}{(r+1)!\,(n+1-r-1)!}\times\frac{n!}{(r+1)!\,(n-r-1)!}$$

$$=\frac{(n-1)!\,(n+1)!\,n!}{r!\,(n-r-1)!\,(r+1)!\,(n-r)!\,(r-1)!\,(n-r+1)!}$$

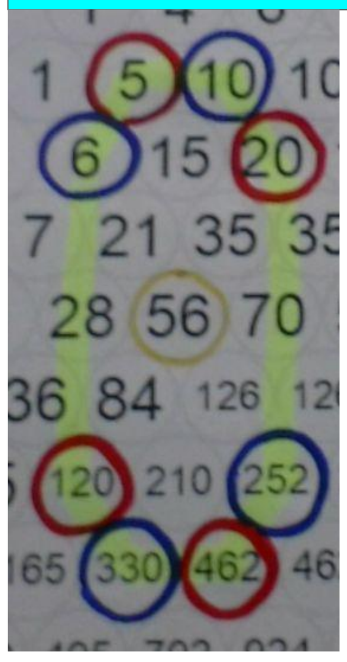
②2つ繋げた図形



4×15×21×5=6,300
5×35×6×6=6,300

六角形を2つ繋げた場合、共有点を除くというルールがあればHoggatt―Hansell等式と同様の性質が一般的に成り立つ事を証明した。

③3つ真下に繋げた図形



青の積＝6×330 ×252×10
　　＝5,544,000

赤の積＝5×20 ×120 ×462
　　＝4,989,600

等式が成り立たない

右下に繋げても成り立たない

③3つ繋げた図形　特別ルール

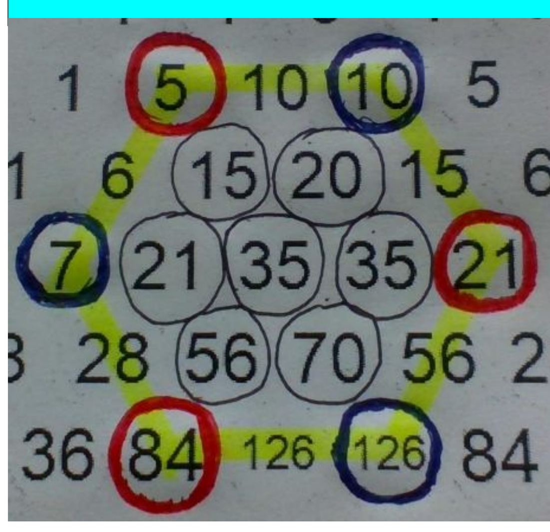
辺上の点28,70を追加する
一個飛ばしでかける

青の積＝ 6×10×70×462×120
　　＝232,848,000

赤の積＝5×20×252×330×28
　　＝232,848,000

特別ルールを用いると、掛けたものが同じ値となるため、Hoggatt―Hansell等式と同様の性質が成り立つ
しかし右下に繋げた場合はうまくいかないときがある

③相似拡大した図形

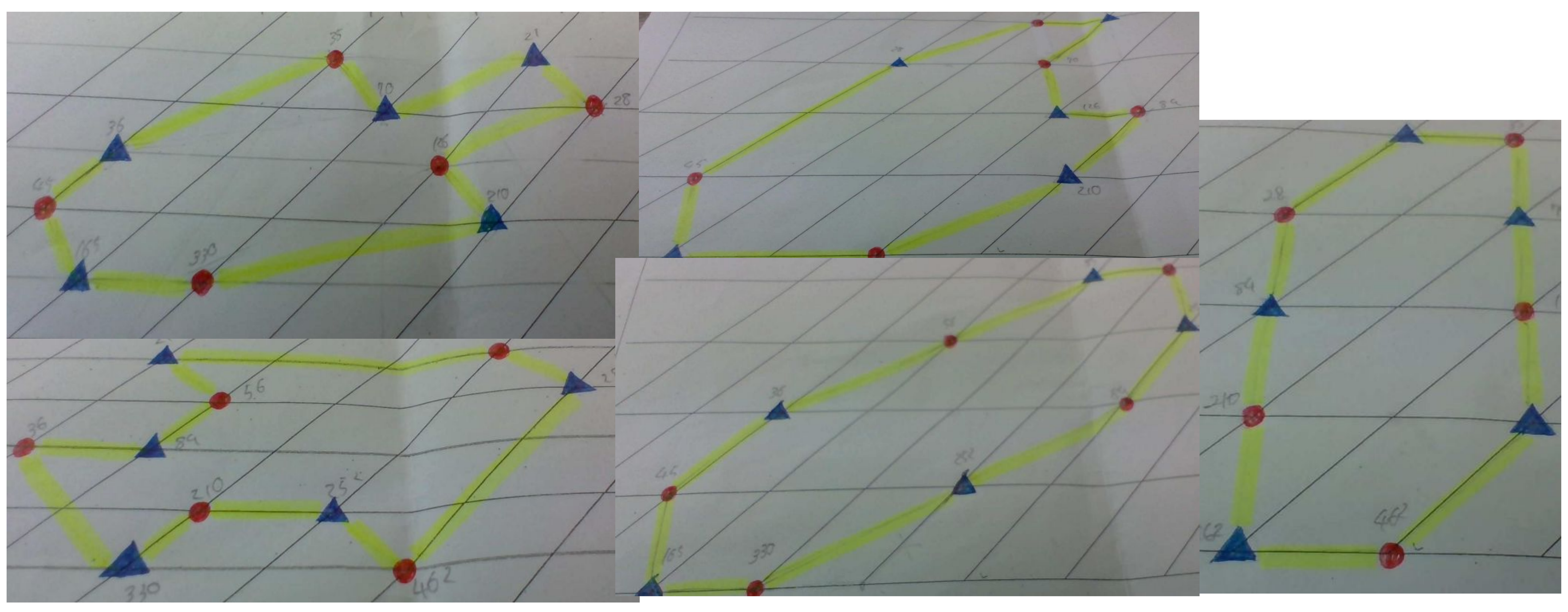


赤の積=5×21×84
　　=8,820
青の積=7×10×126
　　=8,820

「1つ飛ばしでかける」ルールは共通している性質である。

⑤その他の多角形

n-2, n-1, n, n+1, n+2とr-2, r-1, r, r+1, r+2との組み合わせをすべて調べ、4個の等式を発見した。
120通りの式から4通りの等式が見つかった



③まとめとこれから

凹図形や1つ飛ばしにならない図形が存在した
等式が成り立つ多角形に共通する性質は見つけられなかった
Hoggatt-Hansell等式に似たような等式が成り立つ多角形の条件について調べていきたい