

正方形を分割したくてしたくてたまらないあなたへ

数学班 小場夕貴 阿部杏平 島森健太

担当教諭 芳賀崇 浅野亘

◎研究動機

4×4の正方形の分割方法が、数学Bで学習する数列の知識を用いて調べることができそうだと聞いて、この問題に対して興味がわき、解いてみたいと思ったから。さらに、数列の漸化式の高度な内容に触れてみたいと思ったから。

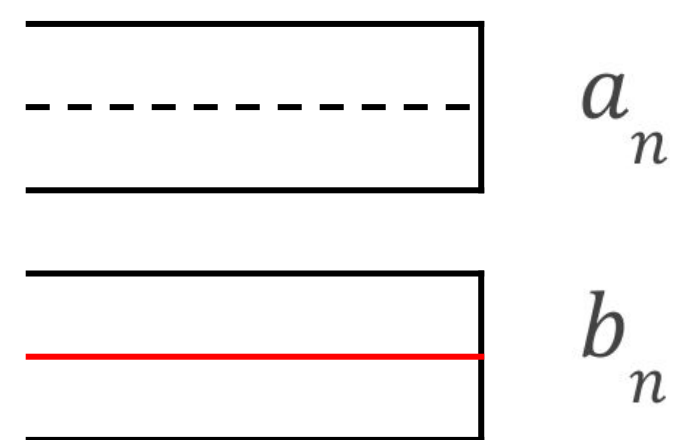
◎目的

4×4の正方形をいくつかの(または一つの)長方形(または正方形)に分割する方法を調べる。

◎研究の方法

・2×nの分割方法

右端が割れていないものを a_n 通り
右端が割れているものを b_n 通り
分割方法の総数を A_n 通りとする



漸化式

一般項

$$a_{n+1} = 2a_n + b_n$$

$$a_n = \frac{(3-\sqrt{2})^{n-1} + (3+\sqrt{2})^{n-1}}{2}$$

$$b_{n+1} = a_n + 4b_n$$

$$b_n = \frac{(1-\sqrt{2})(3-\sqrt{2})^{n-1} + (1+\sqrt{2})(3+\sqrt{2})^{n-1}}{2}$$

$$A_n = a_n + b_n$$

$$A_n = \frac{(2-\sqrt{2})(3-\sqrt{2})^{n-1} + (2+\sqrt{2})(3+\sqrt{2})^{n-1}}{2}$$

⇒正方形の分割方法は漸化式と関係がある？

◎仮説

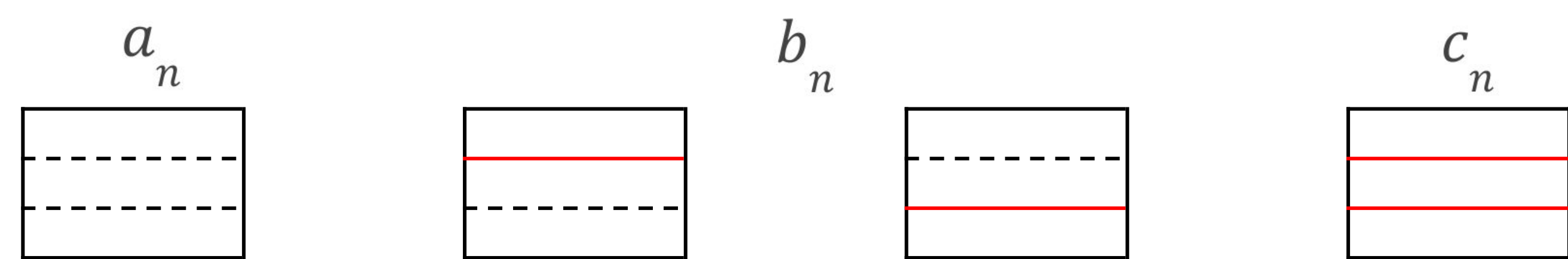
数列の漸化式を使って4×4の分割方法を求めることができるのではないか

◎研究の方法

- ① 3×nの分割方法を調べる
- ② 4×nの分割方法を調べる
- ③ n = 4を代入し4×4の正方形の分割方法を調べる

◎結果

〈3×nのとき〉



真ん中の二つは対称性があるため、二つで b_n とした。

・3×nの分割方法を求める漸化式
1×3と3×1、2×3と3×2の分割数がそれぞれ同じ
⇒漸化式は正しいと考えられる

$$a_{n+1} = 2a_n + 2b_n + c_n$$

$$b_{n+1} = a_n + 5b_n + 2c_n$$

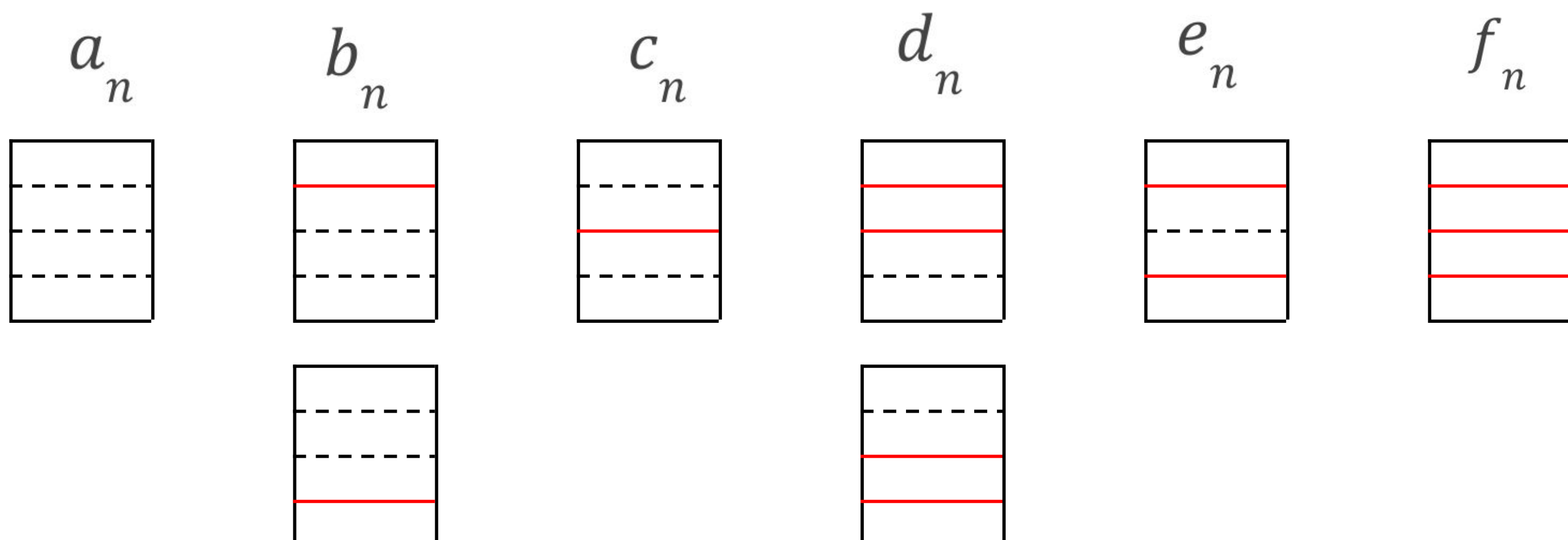
$$c_{n+1} = a_n + 4b_n + 8c_n$$

一般項は求めることができなかった

$$A_n = a_n + 2b_n + c_n$$

〈4×nのとき〉

3×nのときと同様に考える



・4×nの分割方法を求める漸化式

3×nのときと同様に1×4、2×4、3×4のときの値と比較すると一致した
⇒漸化式は正しいと考えられる

$$a_{n+1} = 2a_n + 2b_n + c_n + 2d_n + e_n + f_n$$

$$b_{n+1} = a_n + 5b_n + c_n + 3d_n + 2e_n + 2f_n$$

$$c_{n+1} = a_n + 2b_n + 4c_n + 4d_n + e_n + f_n$$

$$d_{n+1} = a_n + 3b_n + 2c_n + 9d_n + 2e_n + 4f_n$$

$$e_{n+1} = a_n + 4b_n + c_n + 4d_n + 8e_n + 4f_n$$

$$f_{n+1} = a_n + 4b_n + c_n + 8d_n + 4e_n + 16f_n$$

n = 4のとき $A_n = 70878$

3×nのときと同様に一般項は求めることができなかった

$$A_n = a_n + 2b_n + c_n + 2d_n + e_n + f_n$$

◎コンピュータの活用 (2×n)

・Excel

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1						2×1	2×2	2×3	2×4
2	a	2	1		a_n		1	3	11
3	b	1	4		b_n		1	5	23
4					A_n		2	8	34

・B2~C3は漸化式の係数

例) G2には「=F\$2*\$B2+F\$3*\$C2」と入力

・Python

リストと繰り返し処理を用いて2×10までの分割数を自動で求めるプログラムを作成した

```

square.ipynb
ファイル 編集 表示 挿入 ランタイム ツール ヘルプ
+ コード + テキスト
[1] import pandas as pd
a,b=1,1
c=a+b
a_list=list()
b_list=list()
c_list=list()
a_list.append(a)
b_list.append(b)
c_list.append(c)

for i in range(9):
    a=2*a_list[i]+b_list[i]
    b=a_list[i]+b_list[i]
    c=a+b
    a_list.append(a)
    b_list.append(b)
    c_list.append(c)

list1=[a_list,b_list,c_list]
index1=["a_n","b_n","A_n"]
columns=["1","2","3","4","5","6","7","8","9","10"]
pd.DataFrame(list1,index=index1,columns=columns)
    
```

ExcelとPythonどちらも漸化式の係数を用いてプログラムを作成でき、nの値の範囲を自由に指定し長方形の分割数を求めることができる

◎結果

・漸化式を用いて4×4の正方形の分割方法

70878通りを求めることができた

・2×nの一般項を連立漸化式を変形して隣接三項間の漸化式とし、求めることができた

・Excelやプログラミング言語Pythonを使うことでより早く分割数を求めることができた

◎考察

・漸化式を作ることで2×n、3×n、4×nの長方形の分割数が簡単に求められ、その結果を利用して4×4の正方形の分割数を求めることができた

・漸化式を解かなくても5×n、6×nと長方形を拡張して5×5、6×6の正方形の分割数を比較的簡単に求められそう

・漸化式とプログラミングは非常に相性が良い

◎今後の展望

・5×5、6×6などの正方形の分割方法も求める

・別の方法でも考える

◎参考文献

・増補改訂版 チャート式 解法と演習数学II+B 「隣接三項間の漸化式」「連立漸化式」