自然数を2つ選ぶことと円周率の関係

秋田県立湯沢高等学校理数科　数学班
小野元也　小川晴大　柴田煌琉
担当教員　小田嶋芳和

[研究動機]

・身近に隠れている円周率の性質に興味を持ったから。

・自然数を2つ選ぶことと円周率の関係性を詳しく実験してみたい。

[研究内容]

有名な確率の話で、「自然数を2つ選んだ時、それらが互いに素である確率は6/π^2である」と立証されている。

→なぜπが使われるのか、関係性について自分たちなりに調べる。

[実験]

①適当な自然数Nを決め、N以下の自然数を2つ選ぶ（同じ数を選んでも良い）

このときNは十分に大きいとする。Nを∞にしてしまうと確率が1/∞となる

②選んだ2つの自然数がどちらもある素数aで割り切れる確率を P(a)とする

たとえば,a=2,3のとき

P(2)=N以下の2の倍数の個数/N以下の自然数の個数

p(3)=N以下の3の倍数/N以下の自然数の個数

とあらわせる。

計算過程

①P(a)＝[N/a]/N

N/a-1<[N/a]=<N/a → 1/N(N/a-1)<[N/a]/N=<1/N･N/a

lim(N→∞){1/N(N/a-1)}=1/a-1/N=1/a

lim(N→∞)1/N･N/a=1/a

はさみうちの原理より lim(N→∞)[N/a]/N=lim(N→∞)P(a)=**1/a**

今回は二回選ぶので1/a^2となる。

この確率の余事象は1-(1/a^2) という形になる

②自然数を2つ選ぶ操作を繰り返したとき互いに素である確率は、

(1－P(2)^2)(1－P(3)^2)(1－P(5)^2)(1－…

＝(1－1/(2)^2)(1－1/(3)^2)(1－1/(5)^2)(1－…

＝Π(1－1/P(a)^2)(a:素数)……＜1＞

無限等比級数の公式より

公式1

$$1+\frac{1}{n^k}+\frac{1}{(n^k)^2}+\frac{1}{(n^k)^3}=\frac{1}{1-\frac{1}{n^k}}$$

これは無限等比級数の公式a1/(1－r)で r＝1/n^k、a=1を代入したもの。

③＜1＞の式の逆数をとり公式 1に当てはめる。
すると以下の式に変形できる。

公式2

$$1+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}+\cdots=\left(1+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{(2^n)^2}+\cdots\right)\left(1+\frac{1}{3^n}+\frac{1}{(3^n)^2}+\cdots\right)\left(1+\frac{1}{5^n}+\cdots\right.$$

上の公式の nの部分が今回は n=2であるので
1＋1/(2^2)+1/(3^2)+･･･＜2＞
またこの式を下の公式に変換が可能。

公式3

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{6}$$

1/Π(1－1/P(a)^2) (a:素数)
＝(1/(1-1/(2)^2))(1/(1-1/(3)^2))･･･
＝(1+1/2^2+1/2^4+･･･)(1+1/3^2+1/3^4･･･)
＝1+1/2^2+1/3^2+･･･
1+1/2^2+1/3^2+･･･＝1/Π(1－1/P(a)^2) (a:素数)
1/Π(1－1/P(a)^2) (a:素数)＝1+1/2^2+1/3^2+･･･
公式3より
1/Π(1－1/P(a)^2) (a:素数)＝π^2/6

Π(1－1/P(a)^2) (a:素数)＝6/π^2

公式は https://mathlog.info/articles/2953 引用

結果として以上のことから、円周率と自然数を 2つ選んだときの関係性がわかった。また、奇数個選んだ際は以上の結果が現れないため、どのような変化があるのかを、研究したい。

参考文献 https://mathlog.info/articles/2953 https://mathlog.info/articles/2953